

LICENCE D'ETUDES FONDAMENTALES ES SCIENCES  
ECONOMIQUES ET DE GESTION -SEMESTRE 2-

*ENSEMBLE-7-*

**Module: Mathématiques financières**

**Chapitre 4 : Les emprunts**

**Professeur : Abdelouhab HAMLIRI**

**Module: Mathématiques financières**

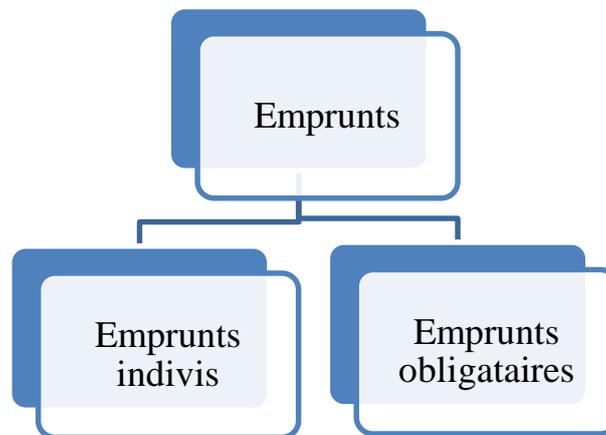
**Plan du cours**

- Chapitre 1 : Les intérêts simples**
- Chapitre 2 : Les intérêts composés**
- Chapitre 3 : Les annuités**
- Chapitre 4 : Les emprunts**
- Chapitre 5 : Les choix d'investissement**

## Chapitre 1 : Les emprunts

Il existe une grande variété d'emprunts. Nous pouvons cependant les regrouper en deux catégories selon que l'emprunteur s'adresse à un seul ou à plusieurs prêteurs.

- L'emprunt indivis : Si l'emprunt est contracté auprès d'un prêteur unique, le contrat établi entre les parties définit les modalités d'un emprunt ordinaire, appelé communément emprunt indivis.
- L'emprunt obligataire : Si l'emprunt est contracté, dès que le capital à emprunter s'avère très important, auprès d'une multitude de prêteurs. L'emprunt total est alors fractionné en parts de même valeur nominale, appelées obligations.



Nous consacrerons ce chapitre à l'étude des emprunts indivis.

### Section 1 : Les emprunts indivis

#### ❖ Généralités

▪ Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur et dont les conditions sont fixées au moment de la signature de ce contrat d'adhésion.

▪ Dans le contrat de l'emprunt indivis, il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis.

▪ L'emprunt indivis peut être souscrit par un particulier ou une entreprise.

#### ❖ Principe général du fonctionnement d'un emprunt indivis

Soit un capital  $C_0$  prêté à la date  $t = 0$ .

- Ce capital est remboursé chaque année par des annuités  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  pendant  $n$  années.

- $i$  est le taux annuel de l'emprunt

- L'égalité : **Emprunt = Remboursements** se décline à la date  $t = 0$  de la manière suivante :

$$C_0 = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{a_n}{(1+i)^n}$$

**Exemple :**

Soit un emprunt  $C_0 = 10\,000 \text{ dh}$  prêté à la date  $t = 0$ . Ce capital est remboursé par un remboursement de  $a_1 = 4000 \text{ dh}$  la première année,  $a_2 = 3000 \text{ dh}$  la 2<sup>ème</sup> année. Combien reste-t-il à rembourser la 3<sup>ème</sup> année ?

- Avec  $i$  est le taux annuel de l'emprunt  $i = 10\%$

**Corrigé :**

$$C_0 = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3}$$

$$10\,000 = \frac{4000}{1+0,1} + \frac{3000}{(1+0,1)^2} + \frac{a_3}{(1+0,1)^3}$$

$$10\,000 - \frac{4000}{1+0,1} - \frac{3000}{(1+0,1)^2} = \frac{a_3}{(1+0,1)^3}$$

$$a_3 = 5170 \text{ dh}$$

- **Valeur actuelle des annuités constantes de fin de période est :**

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \text{ Avec } a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

- **La somme des annuités S est :**

$$S = n \times a = n \times C \times \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

- **L'intérêt global :**

$$I = S - C = n \times a - C = n \times C \times \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} - C$$

- **Notion du coût de l'emprunt**

Est la valeur à payer par l'emprunteur en plus du remboursement du capital:

$$\text{Coût de l'emprunt} = a_1 + a_2 + \dots + a_n - C_0$$

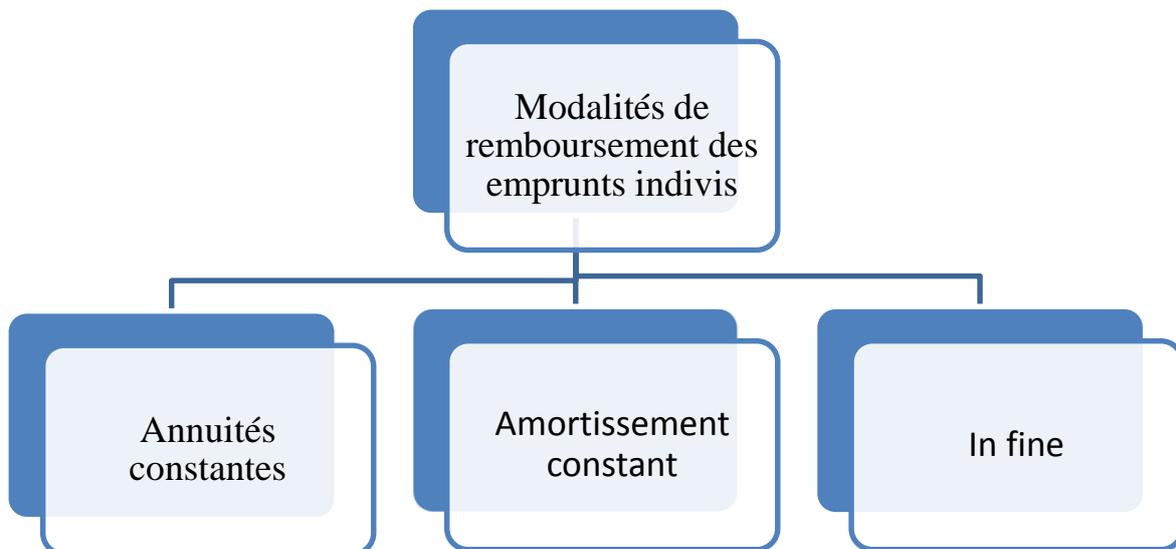
Dans l'exemple précédent :

$$\text{Coût de l'emprunt} = 4000 + 3000 + 5170 - 10000$$

$$\text{Coût de l'emprunt} = 2170 \text{ dh}$$

## Section 2 : Les modalités de remboursement

- L'emprunteur du capital s'engage à s'acquitter de sa dette (capital et intérêt) de sorte que les sommes versées pour le remboursement soient équivalentes au **capital emprunté** augmenté **des intérêts dus**.
- Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période.
- Chaque annuité est, donc, composée de deux éléments :
  - ✓ Le remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'**amortissement**.
  - ✓ Une partie **intérêt** calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.



### □ Remboursement par annuités constantes :

- Le montant de l'emprunt est égal à la valeur actuelle, au taux de l'emprunt  $i$ , de l'ensemble des annuités

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \rightarrow \quad a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

### Application :

La société ALPHA a souscrit un emprunt bancaire de 200 000,00 dhs au taux de 4,5%. Cet emprunt est remboursable en 5 annuités constantes.

1. Calculer le montant de l'annuité constante ;
2. Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt.

### Corrigé :

- ✓ Annuité constante

$$a = V_0 \times \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$
$$a = 200\,000 \times \frac{0,045}{1 - (1 + 0,045)^{-5}}$$
$$a = 45\,558,33$$

- ✓ Tableau d'amortissement de l'emprunt

Pour construire le tableau d'amortissement, il faut disposer des éléments suivants :

Périodes	Capital restant dû	Intérêts de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
Date du remboursement	Est le capital restant à rembourser juste avant le remboursement à la date considérée	Sont ceux payés dans l'annuité de remboursements	Est la part de capital remboursé dans l'annuité de remboursement	

- ✓ Tableau d'amortissement de l'emprunt de la société ALPHA

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	200 000,00	9 000,00	36 558,33	45 558,33
2	163 441,67	7 354,88	38 203,45	45 558,33
3	125 238,22	5 635,72	39 922,61	45 558,33
4	85 315,61	3 839,20	41 719,13	45 558,33
5	43 596,48	1 961,84	43 596,48	45 558,33

### Remboursement par amortissement constant

- Le montant remboursé est le même à la fin de chaque période. Il est égal au montant de l'emprunt divisé par le nombre de périodes.

**Application :**

La société ALPHA a souscrit un emprunt bancaire de 200 000,00 dhs au taux de 4,5%. Cet emprunt est remboursable en 5 annuités constantes.

- Présenter le tableau d'amortissement.

**Corrigé :**

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	200 000	9 000	40 000	49 000
2	160 000	7 200	40 000	47 200
3	120 000	5 400	40 000	45 400
4	80 000	3 600	40 000	43 600
5	40 000	1 800	40 000	41 800

**❑ Remboursement in fine**

• L'emprunt in fine est un emprunt remboursable en totalité (en bloc) à la fin de la durée prévue. Cette modalité de remboursement est de plus en plus répandue

**Application :**

La société ALPHA a souscrit un emprunt bancaire de 200 000,00 dhs au taux de 4,5%. Cet emprunt est remboursé en totalité à la fin de la 5<sup>ème</sup> année.

- Présenter le tableau d'amortissement.

**Corrigé :**

✓ Tableau d'amortissement de l'emprunt

Années	Capital restant dû	Intérêts	Amortissement	Annuité
1	200 000	9 000	-	9 000
2	200 000	9 000	-	9 000
3	200 000	9 000	-	9 000
4	200 000	9 000	-	9 000
5	200 000	9 000	200 000	209 000

**❖ Exercice d'application**

Un entrepreneur désire réaliser un investissement de 800 000 dh. Pour financer son projet, il fait appel à un seul emprunt bancaire (emprunt indivis).

La banque lui propose trois modalités au taux annuel de 8%, pour une durée de 4 ans :

- Première modalité: Remboursement par annuités constantes.
- Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.
- Troisième modalité: Remboursement in fine.
- Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.
- Quelle modalité choisir si l'objectif de l'entrepreneur est de payer le moins d'intérêts possible ?

**Corrigé :**

- Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.

- **Première modalité: Remboursement par annuités constantes.**

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800 000,00	64 000,00	177 536,64	241 536,64
2	622 463,35	49 797,06	191 739,57	241 536,64
3	430 723,78	34 457,90	207 078,74	241 536,64
4	223 645,04	17 891,60	223 645,04	241 536,64

- Coût de l'emprunt = **166 146,57 dh**

- **Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.**

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800 000,00	64 000,00	200 000,00	264 000,00
2	600 000,00	48 000,00	200 000,00	248 000,00
3	400 000,00	32 000,00	200 000,00	232 000,00
4	200 000,00	16 000,00	200 000,00	216 000,00

- Coût de l'emprunt = **160 000 dh**

- **Troisième modalité: Remboursement in fine.**

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800000	64000	0	64000
2	800000	64000	0	64000
3	800000	64000	0	64000
4	800000	64000	800000	864000

- Coût de l'emprunt = **256 000 dh**
- Quelle modalité choisir si l'objectif de l'entrepreneur est de payer le moins d'intérêts possible ?

- Première modalité: Remboursement par annuités constantes.

Coût de l'emprunt = **166 146,57 dh**

- Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.

Coût de l'emprunt = **160 000 dh**

- Troisième modalité: Remboursement in fine.

Coût de l'emprunt = **256 000 dh**

La modalité à choisir est celle correspondante au plus faible coût à savoir le remboursement par amortissements constants.